

# АДАПТИВНОЕ КООРДИНАТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМ НЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ОБЪЕКТОМ

**А.А. Семион**

*Научно-исследовательский университет Высшая школа экономики*  
Россия, 101000, Москва, Мясницкая ул., 20  
E-mail: [spin7ion@gmail.com](mailto:spin7ion@gmail.com)

**Ключевые слова:** задачи фильтрации, задачи управления, задачи идентификации, уравнение Риккати, фильтр Калмана-Бьюси.

**Аннотация:** В данной работе рассматриваются задачи фильтрации, идентификации и управления нелинейной динамической системой, позволяющей описать её системой нелинейных дифференциальных уравнений с линейной структурой и параметрами, зависящими от состояния. Система функционирует в условиях параметрических шумов.

## 1. Введение

Фильтр Калмана-Бьюси [1] является одним из наиболее часто используемых фильтров в современных приложениях. Данный фильтр базируется на использовании моделей полезного случайного процесса и шума, однако требует знания параметров этих моделей на всем интервале функционирования. К сожалению, на практике не всегда возможно определить параметры на этапе синтеза фильтра. Предлагается применить алгоритмы, оптимизирующие работу фильтра в процессе развития полезного процесса. Информация о параметрах системы, полученная в результате работы данных алгоритмов, будет также использована для оптимизации регулятора.

## 2. Постановка задачи

Пусть имеется система вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} X(t) = A(\alpha, X, t)X(t) + B\omega(t) + BU(t) \\ Y = CX(t) + \eta(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{array} \right. .$$

Пара  $A, C$  наблюдаема. Измерение вектора состояния объекта происходит на фоне центрированного гауссового шума  $\eta$  с интенсивностью  $N$ . Дополнительно на объект действует центрированный гауссовый шум  $\omega$  с интенсивностью  $W$ . Предполагается, что шумы  $\omega(t)$  и  $\eta(t)$  некоррелированные и  $M[x^T(t_0)\eta] = 0$ ,  $M[x^T(t_0)\omega] = 0$ .

Требуется построить фильтр оптимальный в смысле минимума дисперсии ошибки выделения полезного процесса на фоне шумов, т.е. функционал качества имеет вид

$J(\varepsilon) = M[\varepsilon^T(t)\varepsilon(t)]$ , здесь  $M$  – знак математического ожидания и  $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ , где  $\hat{x}(t)$  – оценка полезного процесса.

Вектор параметров объекта представим в виде  $\alpha(t) = \alpha^*(t) + \eta + \alpha_n(t)$ , где  $\eta(t)$  – вектор параметрических возмущений,  $\alpha_n(t)$  – вектор настраиваемых параметров. Предполагается, что существует такое значение настраиваемых параметров  $\alpha_n(t) \cong \eta(t)$ , что  $f \cong f(x, \alpha^*)$ , где  $\alpha^*$  – значение параметров объекта в случае отсутствия возмущений, т.е. настройкой параметров  $\alpha_n(t)$ , можно «парировать» параметрические возмущения объекта.

Так же необходимо построить управление, стабилизирующее систему.

### 3. Синтез фильтра

При наличии полной информации о параметрах системы фильтр будет иметь следующую структуру:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{X}(t) = A(t)\hat{X}(t) + B(t)U(t) + L(t)[y(t) - C\hat{X}(t)], \\ \hat{X}(t_0) = \bar{X}_0, \end{cases}$$

Здесь  $\bar{X}_0 = M[X(t_0)]$ ,  $L(t) = P(t)CN^{-1}(t)$ , где  $P(t) = M[\varepsilon^T(t)\varepsilon(t)]$  – дисперсионная матрица ошибок, являющаяся решением уравнения типа Риккати:

$$\frac{d}{dt}P(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - P(t)CN^{-1}(t)CP(t) + B(t)W(t)B^T(t)$$

Предположим, что можно представить  $A(t) = A + \alpha(t)$ , тогда

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X(t) = [A + \alpha(t)]X(t) + B(t)\omega(t) + BU(t), \\ X(t_0) = X_0, \end{cases}$$

а структуру фильтра представим в виде:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{X}(t) = [A + \alpha(t)]\hat{X}(t) + BU(t) + L(t)[y(t) - C\hat{X}(t)], \\ \hat{X}(t_0) = \bar{X}_0, \end{cases}$$

где матрица  $P^*(t)$  – решение дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}P^*(t) = AP^*(t) + P^*(t)A^T - P^*(t)CN^{-1}(t)CP^*(t) + BWB^T. \text{ Данное решение реализуется на стадии проектирования фильтра.}$$

Конструкция алгоритма оптимизации подробно описана в [2] и представляется в виде:

Конструкция алгоритма оптимизации подробно описана в [2] и представляется в виде:

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = M\left[\left\{\frac{\partial y(t)}{\partial \alpha(t)}\right\}\left\{y(t_1) - C\hat{X}(t_1)\right\}\right], \alpha(t_0) = \alpha_0, t_1 = t - \gamma, \gamma \neq 0.$$

## 4. Синтез регулятора

В качестве регулятора предлагается использовать регулятор, по своей структуре напоминающий регулятор с дискретно изменяющимися параметрами, который был подробно освещен в [3], однако вместо подстановки текущего состояния в уравнение Риккати подставляется, полученные в процессе оптимизации фильтра параметры системы.

Интервал функционирования разбивается на равные по длине промежутки. Управление на  $i+1$ -ом промежутке представляется в виде

$$U_{i+1} = K_i \hat{X}(t) = -R^{-1} B^T S_i \hat{X}(t),$$

где  $S_i$  – решение уравнения Риккати вида

$$S_{i+1} [A + \alpha_i] + [A + \alpha_i]^T S_{i+1} - S_{i+1} B R^{-1} B^T S_{i+1} + Q = 0$$

Матрицу  $K$  будем называть коэффициентом усиления регулятора.

Использование предложенного управления требует решения уравнения Риккати в темпе функционирования объекта.

## 5. Математическое моделирование

В качестве математической модели будет использована модель спутника [3].

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = a_1^* X_2 X_3 + b_1 U_1 \\ \dot{X}_2 = a_2 X_1 X_3 + b_2 U_2, \\ \dot{X}_3 = a_3 X_2 X_1 + b_3 U_3 \end{cases}$$

$$Y = X_1 + W.$$

Параметр  $a_1^*$  точно не известен.

Структура фильтра представляется в виде:

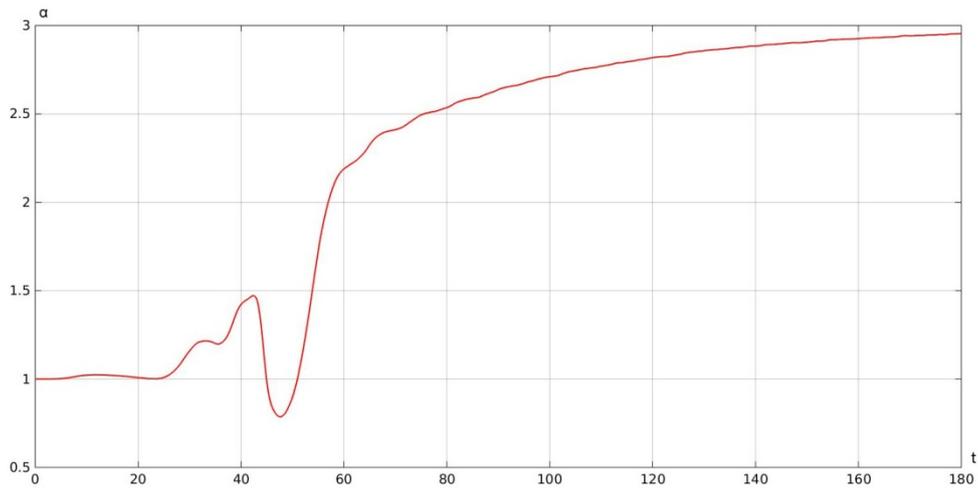
$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{X}_1 = \alpha(t) \hat{X}_2 \hat{X}_3 + b_1 U_1 + L(y - \hat{X}_1) \\ \frac{d}{dt} \hat{X}_2 = a_2 \hat{X}_1 \hat{X}_3 + b_2 U_2 + L(y - \hat{X}_1) \\ \frac{d}{dt} \hat{X}_3 = a_3 \hat{X}_2 \hat{X}_1 + b_3 U_3 + L(y - \hat{X}_1) \end{cases}.$$

Алгоритм оптимизации представляется в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \dot{\alpha} = M \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial \hat{X}_1}{\partial \alpha} \\ \left\{ y - \hat{X}_1 \right\} \end{array} \right], \quad \alpha(0) = \alpha_0.$$

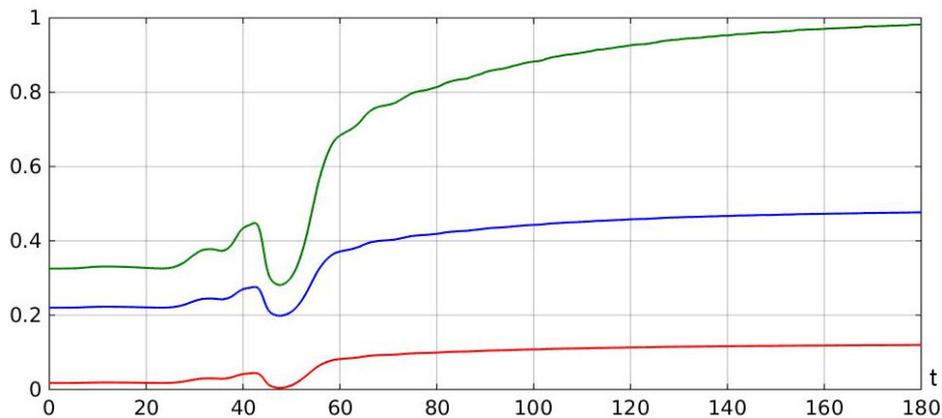
При математическом моделировании  $a_1^* = 3$ ,  $\alpha_0 = 1$ .

Как видно из графика на рис. 1 параметр  $\alpha(t)$  приходит к реальному значению  $a_1^*$ :



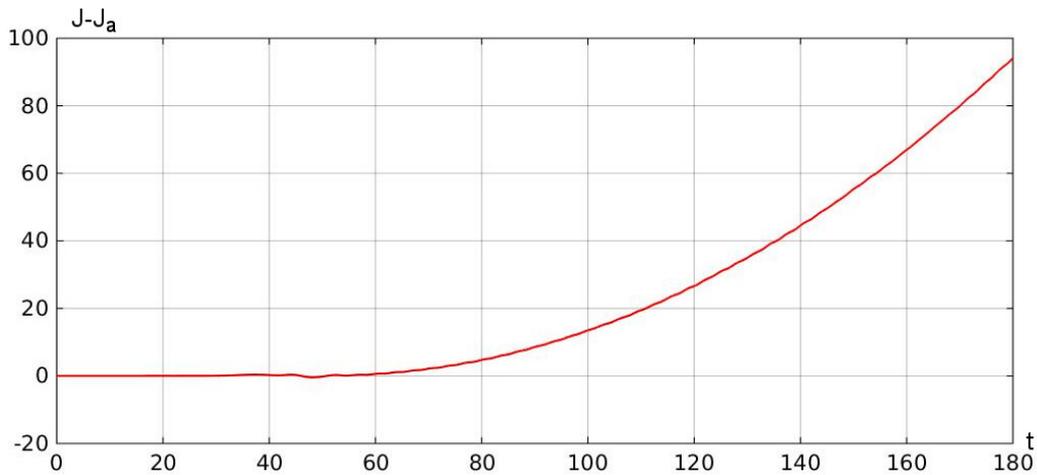
**Рис. 1.** Оптимизация параметра  $\alpha$ .

Коэффициенты регулятора перестраиваются исходя из обновленной информации. На рис. 2 приведена перестройка  $3^{-x}$  коэффициентов регулятора.



**Рис. 2.** Изменение нескольких элементов коэффициента усиления регулятора.

Проведем сравнение эффективности фильтра Калмана-Бьюси без адаптации и с адаптацией путем сравнения функционалов фильтров. Для этого из значения функционала фильтра Калмана-Бьюси без адаптации вычитается значения функционала фильтра Калмана-Бьюси с адаптацией. Как видно из приведенного на рис. 3 графика, фильтр Калмана-Бьюси без адаптации приходит к большему значению функционала, так как не оптимизирует свою работу в условиях неопределенности параметрического шума.



**Рис. 3.** Разница функционалов фильтра Калмана-Бьюси с адаптацией и без.

## 6. Заключение

В данной работе продемонстрирован фильтр Калмана-Бьюси, оптимизирующий свою работу в условиях неопределенности параметров системы и наличии различных шумов, в том числе параметрических. Проведен синтез нелинейного регулятора, использующего полученную в ходе оптимизации фильтра информацию о системе. Проведено математическое моделирование, иллюстрирующее работу приведенных в работе алгоритмов.

Работа выполнена за счет гранта РФФИ (№17-11-01220), численное моделирование выполнено на сторонних вычислительных мощностях при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (19-08-00535А).

## Список литературы

1. Цыпкин Я.З. Основы информационной теории идентификации. М.: Наука, 1984.
2. Афанасьев В.Н. Управление неопределенными системами. М.: РУДН, 2008.
3. Афанасьев В.Н., Семион А.А. Регулятор с дискретно изменяющимися параметрами // Проблемы управления. Май 2014. С. 14-20.