

Применение гиперболических вложений данных  
в машинном обучении  
Применение метода развёртки в машинном  
обучении

Александра Бернадотт

НИУ ВШЭ, ФКН, Лаборатория алгебраической топологии и её приложений,  
Москва  
МИСиС, Кафедра инженерной кибернетики, Москва  
ООО Нейроспутник, Москва

Москва, 2023

Цель:

- оптимизировать точность классификации состояний мозга

Задачи:

- максимизировать точность классификации патологических состояний (алкоголизм, нейродеградация) и состояний здорового мозга;
- максимизировать точность классификации состояний, соответствующих (квази-)движениям.

# Часть 1. Применение гиперболических вложений данных в машинном обучении

Почему выбрали методы гиперболической геометрии?

# Часть 1. Применение гиперболических вложений данных в машинном обучении

В евклидовом пространстве существуют различные псевдосферы, имеющие конечную площадь постоянной отрицательной гауссовой кривизны.

Theorem 1 (Гильберта, 1901)

*Никакая полная регулярная поверхность постоянной отрицательной гауссовой кривизны не погружается в  $\mathbb{R}^3$*

Наши данные тип 1: 3Д вектор значений из  $\mathbb{Q}$ . Для задачи оценки морфо-функционального состояния мозга.

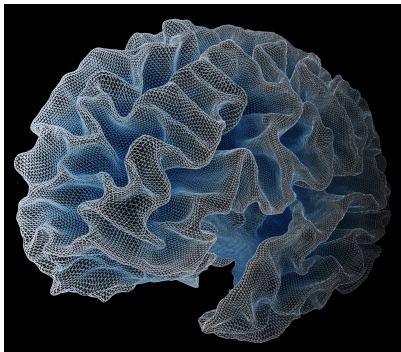
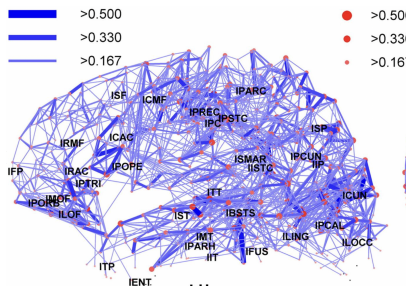


Рис.: Коннектом коры на микроуровне.

# Часть 1. Применение гиперболических вложений в МО

Наши данные тип 2: коннектом на макроуровне в виде нагруженного ориентированного графа с координатами в выбранном метрическом пространстве.  $G = (V, E, \varphi, \psi, \omega)$ ,  $V$  – где вершины графа  $v \in V$ ,  $E$  – рёбра графа,  $\varphi$  – функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру  $e \in E$  пару его вершин  $v_i, v_j \in V$ ,  $\psi$  – функция локализации, сопоставляющая каждой вершине координаты в соответствующем метрическом пространстве,  $\omega$  – функция нагруженности вершины (из  $R$ ) от времени.



Наши данные тип 3: семантически размеченные временные ряды.

В задаче распознавания квази-движений мы смотрим на сигнал мозга в виде временных рядов как на иерархическую модель, представленную графовым деревом.



Рис.: ЭЭГ сигнал мозга с визуализацией источников сигнала.

Распознавание квази-движений (состояний мозга).

- Подзадача 1: представить временные ряды электромагнитного сигнала мозга, соответствующего функциям квазидвижений и движений, в виде иерархической структуры и графа;
- Подзадача 2: предложить алгоритмы гиперболических вложений с учётом семантических связей для анализа электромагнитного сигнала мозга, соответствующего функциям квазидвижений и движений, позволяющий повысить точность и производительность алгоритмов классификации.
- Подзадача 3: продемонстрировать результаты на экспериментальных данных. Получить дополнительную информацию о структуре семантических связей квазидвижений и движений, представленных электромагнитным сигналом мозга.



# Часть 1. Применение гиперболических вложений в МО

## Распознавание квази-движений (состояний мозга).

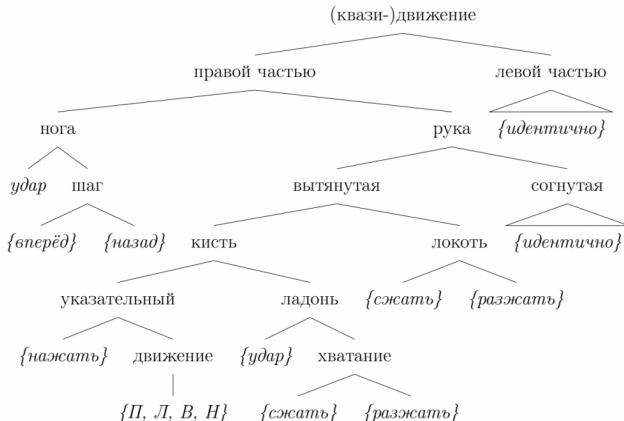


Рис.: Графовое представление данных, согласно семантике.

# Часть 1. Применение гиперболических вложений в МО

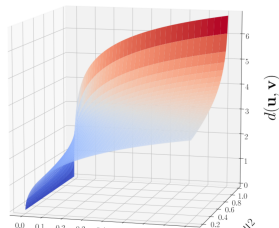
Эмбединг с использованием шара Пуанкаре.

Модель Пуанкаре гиперболического пространства соответствует риманову многообразию  $(B^n, g_x)$ , т. е. открытому единичному шару, снабженному римановым метрическим тензором:

$$\delta(u, v) = 2 \frac{\|u - v\|^2}{(1 - \|u\|^2)(1 - \|v\|^2)} \quad (1)$$

где  $u$  и  $v$  – вектора в  $\mathbb{R}^n$  с евклидовой нормой меньше единицы  $\|u\| < 1, \|v\| < 1$ . Функция расстояния:

$$d(u, v) = \operatorname{arcosh}(1 + \delta(u, v)) \quad (2)$$



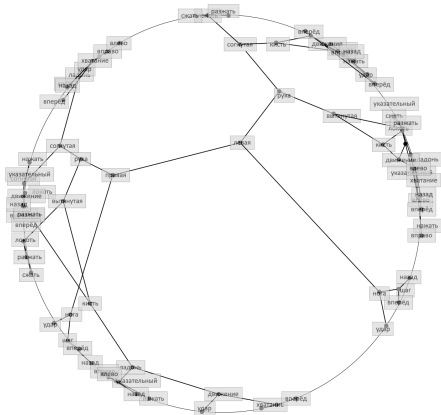
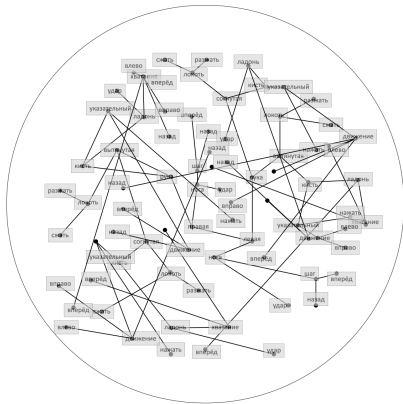
Мы минимизировали функцию потерь:

$$L(E) = \sum_{(u,v) \in S} \log \frac{e^{-d(u,v)}}{\sum_{v' \notin S} e^{-d(u,v')}} \quad (3)$$

где  $S$  – семантическая близость векторов,  $E$  – гиперболическое вложение.

Для задач оптимизации гиперболических вложений разработаны RSGD, RSVRG, RAdaGrad, RAdam и RAMSGrad.

# Часть 1. Применение гиперболических вложений в МО



## Часть 2. Метод многомерной развертки для алгебро-топологического анализа данных морфо-функциональных структур мозга

Цель: распознавание состояний мозга.

- Подзадача 1: предложить метод классификации состояний мозга с учетом алгебро-топологического представления данных с использованием метода гиперболического представления данных и метода целенаправленного проецирования;
- Подзадача 2: предоставить алгоритм классификации;
- Подзадача 3: продемонстрировать на экспериментальных данных ЭЭГ (алкоголики и трезвенники).

## Часть 2. Метод многомерной развертки для МО

Метод многомерной развёртки предложен В.М. Бухштабером в 1994 году

- Временной ряд  $f = (f_1, \dots, f_N)$  – это последовательность значений функции  $f(t)$ , с фиксированным временным интервалом  $\Delta t$ .
- $n$ -мерная развертка  $X_f = X_f(N, n)$  временного ряда  $f = (f_1, \dots, f_N)$  в  $n$ -мерном евклидовом пространстве – это кусочно-линейная кривая, полученная последовательным соединением векторов  $X_1, X_2, \dots, X_p$ , где  $X_i^T = (f_i, f_{i+1}, \dots, f_{i+n-1})$ ,  $p = N - (n - 1)$ .
- ранг кривой  $K$  не превосходит  $r$ , если существует такая  $r$ -мерная плоскость  $L \subset \mathbb{R}^n$ , что  $X_q \in L$  для всех  $q = 1, \dots, p$ .
- $\varepsilon$ -ранг кривой  $K$  не превосходит  $r$ , если существует такая  $r$ -мерная плоскость  $L \subset \mathbb{R}^n$ , что  $\sum_{q=1} \delta(X_q, L)^2 < \varepsilon$ ,  $\delta(X_q, L) = \min_{z \in L} \|X_q - Z\|$ ,

- Матрицей рассеяния  $T(K)$  кривой  $K$  будем называть матрицу рассеяния совокупности её узлов  $X_1, \dots, X_p$ , то есть  $T(K) = \sum_{q=1}^p (X_q - E)(X_q - E)$ , где  $E = 1/p \sum_{q=1}^p X_q$

### Theorem 2 (Бухштабер, 1994)

*Ранг кривой  $K$  не превосходит  $r$  ( $rk(K) \leq r$ ) тогда и только тогда, когда  $\lambda_s = 0$  для всех  $s > r$ , где  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$  суть собственные значения матрицы рассеяния  $T(K)$ .*

*Соответственно,  $\varepsilon$ -ранг кривой  $K$  не превосходит  $r$  ( $rk(K) \leq r$ ) тогда и только тогда, когда  $\sum_{s=r+1}^n \lambda_s \leq \varepsilon$ .*

## Часть 2. Метод многомерной развертки для МО

- $n$ -мерные развертки временных рядов лежат в подпространствах  $L$ , размерность которых не зависит от  $n, N$ .
- Эти временные ряды принадлежат классу функций  $g(t + \tau) = \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) \psi_k(\tau)$  для соответствующих  $\varphi_k(t)$ ,  $\psi_k(\tau)$  и параметра  $m$ .

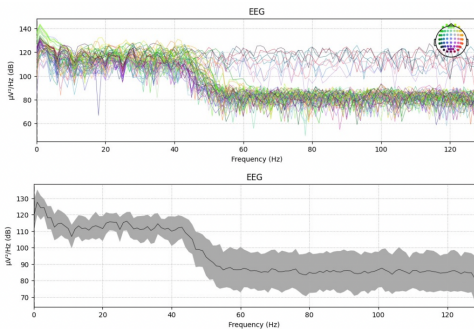
### Theorem 3 (Бухштабер, 1994)

Пусть  $g(t)$  – достаточное число раз дифференцируемая вещественнозначная функция. Тогда абсолютный ранг функции  $g(t)$  не превосходит  $r$  тогда и только тогда, когда  $g(t)$  является решением обыкновенного дифференциального уравнения  $\sum_{q=0}^r b_q \frac{d^q}{dt^q} g(t) = C$  с постоянными ненулевыми коэффициентами  $b_0, \dots, b_r$ .



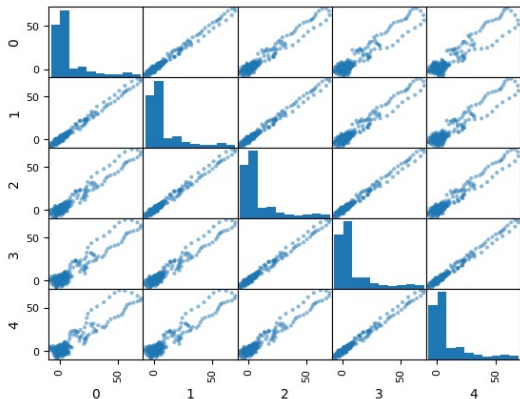
- Данные ЭЭГ записаны на устройстве из 64 электрода. Данные были записаны на 122 испытуемых, разделенных на две группы: с диагностированным хроническим алкоголизмом и группа, не соответствующая критерием алкоголизма. От каждого испытуемого получали по 120 записей длины 1 секунда.
- Каждый испытуемый подвергался воздействию двух стимулов, которые представляли собой изображения объектов, выбранных из набора изображений Снодграсса и Вандерварта.
- Оцифрованные данные представляли собой временные ряды длиной 1 секунда, с частотой дискретизации сигнала в 256 Гц, то есть временной ряд представлен был 256-ю значениями.

# Часть 2. Метод многомерной развертки для МО



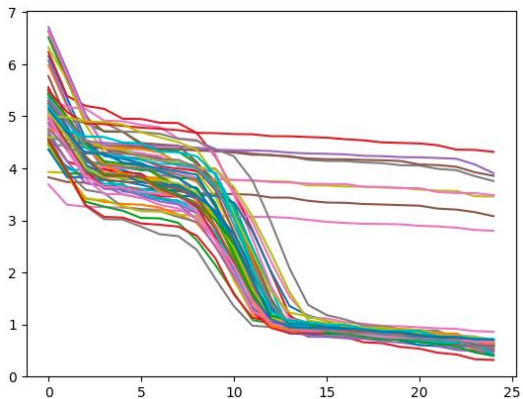
## Часть 2. Метод многомерной развертки для МО

Построили развертку для каждого канала,  
 $n = 5, 25, 100, N = 256$ . Посчитали матрицу рассеяния для  
каждого канала на развертке.



## Часть 2. Метод многомерной развертки для МО

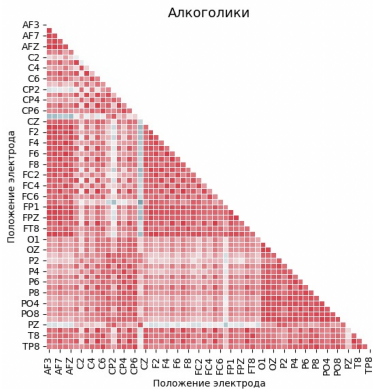
Посчитали собственные значения, полученные на матрице рассеяния для 64-х 5,25 и 100-мерных разверток.



**Рис.:** Собственные значения, полученные на матрице рассеяния для 64-х 25-мерных разверток.

# Часть 2. Метод многомерной развертки для МО

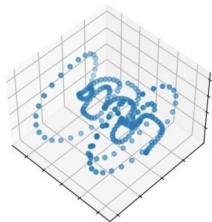
Посчитали корреляцию между каналами с выравниваем.



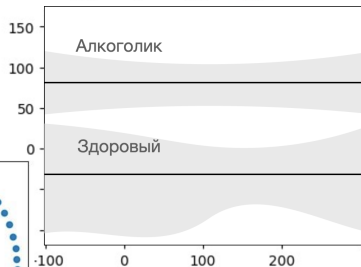
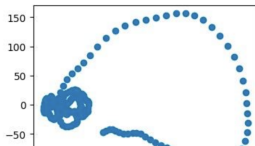
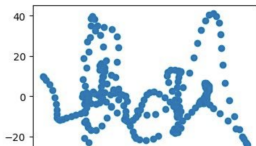
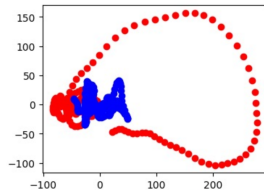
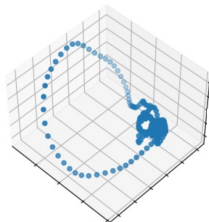
# Часть 2. Метод многомерной развертки для МО

Строили гиперплоскости с доверительным интервалом для двух классов Алгоритмами 1 и 2.

Здоровый



Алкоголик



## Часть 2. Метод многомерной развертки для МО

Сравнили точность классификации предложенного алгоритма по метрике  $ACC = \frac{TP+TN}{TP+FP+TN+FN}$  с работами коллег на данном датасете.

Источник	Классифи-	Метрика (ACC)
Екапутри et al. [16]	SVM	77.80
Ehlers et al. [8]	Дискриминантный анализ	88.00
Rieg et al. [17]	Random Forest	96.67
Sharma et al. [18]	LS-SVM	97.08
Malar et al. [19]	ELM	87.60
P. Dewi Purnamasari et al. [20]	BPNN	90.00
Faust et al. [28]	HOS	92.00
Kannathal et al. [29]	Дискриминантный анализ	90.00
Acharya et al. [9]	SVM	91.70
L. Farsi et al. [30]	PCA + ANN	71.00
	LSTM 1	91.00
	LSTM 2	93.00
M. Zubair et al. [31]	ANN	97.37
	KNN	98.22
	XGBoost	98.97
Предложенный метод	Алгоритм 1 и 2	100

Спасибо за внимание!